数理解析研究所講究録
280巻 1976年 94-102

Exponential group の holomorphically induced representation について

東大　理　藤原英徳

1．我々がここで扱う問題を明らかにする事から始める．

定義．Gをリー環$\mathfrak{g}$を有する単連結可解リー群とする．指数写像 $exp: \mathfrak{g} \to G$ が全射である時，Gを exponential group という．

この節においては，Gは常にリー環$\mathfrak{g}$を有する exponential group を表わすものとする．実ベクトル空間Vに対し，そのdualをV^*で表わす．

定義．$f \in \mathfrak{g}^*$とする．fにおける$\mathfrak{g}$の positive polarization とは，$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$の複素部分リー環$\mathfrak{h}$で次の性質を持つものをいう．

1) $f([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) = 0$ かつ $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h} = \frac{1}{2}(\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} + \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_f)$ ここに $\mathfrak{g}_f = \{X \in \mathfrak{g};\ f([X, Y]) = 0 \quad for\ all\ Y \in \mathfrak{g}\}$.

2) $\mathfrak{h} + \overline{\mathfrak{h}}$ は$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$の複素部分リー環である．

3) すべての $X \in \mathfrak{h}$ に対し，$if([X, \overline{X}]) \geq 0$.

$f \in \mathfrak{g}^*$における$\mathfrak{g}$の positive polarization の集合を $P^+(f, \mathfrak{g})$ で

表わす。$\mathfrak{f}\in P^+(f,\mathfrak{g})$に対し，$\mathfrak{g}$の部分リー環$\mathfrak{d}$ (resp. $\mathfrak{e}$) を$\mathfrak{d}=\mathfrak{f}\cap\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{e}=(\mathfrak{f}+\overline{\mathfrak{f}})\cap\mathfrak{g}$) で定義し，$D=\exp\mathfrak{d}$ (resp. $E=\exp\mathfrak{e}$) とおく．この時 $\chi_f(\exp X)=e^{if(X)}$ $(X\in\mathfrak{d})$ は D の character（1次元ユニタリ表現）を与える．これから誘導されたEのユニタリ表現を$\hat{\rho}(f,\mathfrak{f},E)=\operatorname{ind}_{D\uparrow E}\chi_f$で，その表現空間を$\hat{\mathcal{H}}(f,\mathfrak{f},E)$で表わす．E上無限回微分可能な複素数値函数の空間 $C^\infty(E)$ を次の様にして右$\mathfrak{e}_{\mathbb{C}}$-加群と見なす．$\varphi\in C^\infty(E)$と$Z=X+iY\in\mathfrak{e}_{\mathbb{C}}$ $(X,Y\in\mathfrak{e})$に対し，

$$\varphi\cdot Z=\varphi\cdot X+i\varphi\cdot Y$$

とおく，ここに $\varphi\cdot X$ $(X\in\mathfrak{e})$ は

$$(\varphi\cdot X)(a)=\frac{d}{dt}\varphi(a\exp tX)\Big|_{t=0},\quad a\in E$$

で定義される．

$\mathcal{H}(f,\mathfrak{f},E)=\hat{\mathcal{H}}(f,\mathfrak{f},E)\cap\{\varphi\in C^\infty(E);\ \varphi\cdot X=-if(X)\varphi \text{ for all } X\in\mathfrak{f}\}$

とおくと，$\mathcal{H}(f,\mathfrak{f},E)$は$\hat{\mathcal{H}}(f,\mathfrak{f},E)$の$\hat{\rho}(f,\mathfrak{f},E)$不変な閉部分空間である (cf. [1])．Gのユニタリ表現

$$\rho(f,\mathfrak{f},G)=\operatorname{ind}_{E\uparrow G}\left(\hat{\rho}(f,\mathfrak{f},E)\,|\,\mathcal{H}(f,\mathfrak{f},E)\right)$$

を$\mathfrak{f}\in P^+(f,\mathfrak{g})$から構成されたGの <u>holomorphically induced representation</u> と呼ぶ．$\rho(f,\mathfrak{f},G)$の表現空間を$\mathcal{H}(f,\mathfrak{f},G)$で表わす．この表現$\rho(f,\mathfrak{f},G)$に関し我々は以下の問題1～問題4を考えよう．

<u>問題1</u>．$\mathcal{H}(f,\mathfrak{f},G)\neq\{0\}$なる為の$(f,\mathfrak{f})$に対する条件は何か？

問題2. $\rho(f,\mathfrak{f},G)$ が既約になる為の $(f,\mathfrak{f})$ に対する条件は何か？

問題3. $\rho(f,\mathfrak{f},G)\ (\neq 0)$ が既約な時、$\rho(f,\mathfrak{f},G)$ は $\mathfrak{f}\in P^+(f,\mathfrak{g})$ に依らないか？

問題4. $\rho(f,\mathfrak{f},G)$ が可約な時その既約成分への分解はどうなるか？

2. $\mathfrak{g}$ を n 次元実可解リー環, $\{0\}=\mathfrak{g}_0\subset\mathfrak{g}_1\subset\cdots\cdots\subset\mathfrak{g}_{n-1}\subset\mathfrak{g}_n=\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ を $\dim\mathfrak{g}_k=k\ (0\leqq k\leqq n)$ なる $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ のイデアル列とする。この時各剰余空間 $\mathfrak{g}_k/\mathfrak{g}_{k-1}$ への $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の随伴表現により $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上の一次形式 $\lambda_k\ (1\leqq k\leqq n)$ が生じる。

定義. λ_k を $\mathfrak{g}$ に制限したものを $\mathfrak{g}$ の root と呼ぶ。

定義. 可解リー環 $\mathfrak{g}$ は, その root λ_k がすべて

$$X\longmapsto\mu_k(X)(1+i\alpha_k)\quad(X\in\mathfrak{g}),\quad\alpha_k\in\mathbb{R},\quad\mu_k\in\mathfrak{g}^*$$

の形である時, exponential algebra と呼ばれる。

positive polarization の概念は Kähler algebra の概念と非常によく似ている。

定義. exponential algebra $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}$ 上の一次変換 j 及び $\mathfrak{g}$ 上の反対称双一次形式 ρ から成る組 $(\mathfrak{g},j,\rho)$ が次の性質を持つ時、exponential Kähler algebra と呼ばれる。

1) $j^2=-1$.

2) $[jX, jY] = j[jX, Y] + j[X, jY] + [X, Y]$.

3) $\rho(jX, jY) = \rho(X, Y)$.

4) $\rho(jX, X) > 0$ for $X \neq 0$.

5) $\rho([X, Y], Z) + \rho([Y, Z], X) + \rho([Z, X], Y) = 0$.

これらの性質に加えて，$\omega \in \mathfrak{g}^*$ で

$$\rho(X, Y) = \omega([X, Y]) \quad \text{for all } X, Y \in \mathfrak{g}$$

なるものが存在する時，$(\mathfrak{g}, j, \omega)$ を <u>exponential j-algebra</u> と呼ぶ。我々はしばしば exponential algebra $\mathfrak{g}$ 自体を exponential Kähler algebra 又は exponential j-algebra と呼ぶ事にする。

リー環 $\mathfrak{g}$ が完全可解である時，即ちその root がすべて実である時，exponential Kähler algebra (resp. exponential j-algebra) $\mathfrak{g}$ は normal Kähler algebra (resp. normal j-algebra) と呼ばれる。我々はまず normal j-algebra に対する Pjateckiĭ-Šapiro の構造定理 (cf. [3]) を一般化して exponential j-algebra に対する構造定理を与える。

<u>定理 1</u>. $(\mathfrak{g}, j, \omega)$ を exponential j-algebra とする。$\mathfrak{g}$ に内積 S を $S(X, Y) = \omega([jX, Y])$ $(X, Y \in \mathfrak{g})$ で定義し、$\eta = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ の S に関する直交補空間を $\mathfrak{a}$ で表わす。$\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{g}$ の可換な部分リー環で，$\mathfrak{g} = \mathfrak{a} + \eta$，又 $\mathfrak{a}$ の η 上への随伴表現は複素対角化可能である。$\alpha \in \mathfrak{a}^*$ に対し $\eta^\alpha = \{X \in \eta\,;\, [A, X] = \alpha(A)X \text{ for all } A \in \mathfrak{a}\}$ とおき，$j(\eta^\alpha) \subset \mathfrak{a}$ なる $\eta^\alpha \neq \{0\}$ の全体を $\{\eta^{\alpha_i}\}$，$1 \leq i \leq r$ とする。こ

の時、$\dim \mathfrak{n}^{\alpha_i}=1$ かつ $r=\dim \mathfrak{a}$ である．今 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ を適当に番号付けてやると $\mathfrak{n}^\beta \neq \{0\}$ なる $\beta\in\mathfrak{a}^*$ で $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 以外のものはすべて

$$\tfrac{1}{2}(\alpha_m+\alpha_k),\quad \tfrac{1}{2}(\alpha_m-\alpha_k),\qquad 1\leqq k<m\leqq r,$$
$$\tfrac{1}{2}\alpha_k,\qquad\qquad 1\leqq k\leqq r$$

（すべての形が生じるとは限らない）の形であり，$\mathfrak{n}$ は

$$\mathfrak{n}=\sum_{m>k}\mathfrak{n}^{\frac{1}{2}(\alpha_m-\alpha_k)}+\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}}+\sum_{m\geqq k}\mathfrak{n}^{\frac{1}{2}(\alpha_m+\alpha_k)}$$

と分解される，ここに $\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}}=\sum_k\tilde{\mathfrak{n}}^{\frac{1}{2}\alpha_k}$ 更に $\tilde{\mathfrak{n}}^{\frac{1}{2}\alpha_k}$ は $\mathrm{ad}_{\mathfrak{n}}\mathfrak{a}$ で不変な部分空間でその複素化は $\mathrm{ad}_{\mathfrak{n}_c}\mathfrak{a}$ の $A\mapsto\frac{1}{2}\alpha_k(A)(1+i\beta_{k,p})$ $(A\in\mathfrak{a})$, $\beta_{k,p}\in\mathbb{R}$ の形の root に対応する root space の和である．$\mathfrak{g}_0=\mathfrak{a}+\sum_{m>k}\mathfrak{n}^{\frac{1}{2}(\alpha_m-\alpha_k)}$，$\mathfrak{g}_1=\sum_{m\geqq k}\mathfrak{n}^{\frac{1}{2}(\alpha_m+\alpha_k)}$ とおくと，$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0+\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}}+\mathfrak{g}_1$，$[\mathfrak{g}_i,\mathfrak{g}_k]\subset\mathfrak{g}_{i+k}$，$j(\mathfrak{n}^{\frac{1}{2}(\alpha_m-\alpha_k)})=\mathfrak{n}^{\frac{1}{2}(\alpha_m+\alpha_k)}$ $(1\leqq k<m\leqq r)$，$j(\tilde{\mathfrak{n}}^{\frac{1}{2}\alpha_k})=\tilde{\mathfrak{n}}^{\frac{1}{2}\alpha_k}$ $(1\leqq k\leqq r)$ である．U_i を $\mathfrak{n}^{\alpha_i}$ の元 $(\neq 0)$ で $[jU_i,U_i]=U_i$ なるものとし，$s=\sum_{i=1}^{r}U_i$ とおく．この時 $\alpha_k(jU_i)=\delta_{k,i}$，$\mathrm{ad}\,js\,|\,\mathfrak{g}_0=0$，$\mathrm{ad}\,js\,|\,\mathfrak{g}_1=\mathrm{Id}$，$\mathrm{ad}\,js\,|\,\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}}$ は半単純でその固有値の実部はすべて $\frac{1}{2}$．最後に $X\in\mathfrak{g}_0$ に対し $jX=[s,X]$ である．

次に Gindikin, Pjateckiĭ-Šapiro 及び Vinberg の normal Kähler algebra に対する基本定理（cf. [2]）を exponential Kähler algebra に一般化してやる．

定理2．exponential Kähler algebra $\mathfrak{g}$ は半直和

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{I}+\mathfrak{H}$$

に分解される，ここに $\mathfrak{f}$ は j 不変な可換イデアルであり、部分リー環 $\mathfrak{m}$ は exponential j-algebra である．

3．$\mathfrak{g}$ を有限次元実可解リー環，G をリー環 $\mathfrak{g}$ を有する単連結可解リー群とする時，G が exponential group である事と $\mathfrak{g}$ が exponential algebra である事は同値である事が知られている。この節及び後に続く節では G はリー環 $\mathfrak{g}$ を有する exponential group，$f \in \mathfrak{g}^*$，$\mathfrak{f} \in P^+(f, \mathfrak{g})$ とし，$\mathfrak{d} = \mathfrak{f} \cap \mathfrak{g}$，$\mathfrak{e} = (\mathfrak{f} + \bar{\mathfrak{f}}) \cap \mathfrak{g}$ とおく．更に $\mathfrak{z} = \mathfrak{d} \cap \ker f$ とおくと $\mathfrak{d}$ 及び $\mathfrak{z}$ は共に $\mathfrak{e}$ のイデアルである．$\hat{\mathfrak{e}} = \mathfrak{e}/\mathfrak{z}$，$\mathfrak{z} = \mathfrak{d}/\mathfrak{z}$ とし $\pi : \mathfrak{e} \to \hat{\mathfrak{e}}$ を自然な射影，$\hat{\mathfrak{f}} = \pi(\mathfrak{f})$，$f_0 = f \,|\, \mathfrak{e} \in \mathfrak{e}^*$ とする．更に $\tilde{f} \in (\hat{\mathfrak{e}})^*$ を $\tilde{f} \circ \pi = f_0$ なるものとする．

<u>定理3</u>．$\hat{\mathfrak{e}}$ は半直和

$$\hat{\mathfrak{e}} = \mathfrak{n} + \mathfrak{m}, \quad \mathfrak{n} : \text{イデアル}, \quad \mathfrak{m} : \text{部分リー環}$$

と分解され，この分解は次の性質を持つ．$\mathfrak{f}_1 = \hat{\mathfrak{f}} \cap \mathfrak{n}_{\mathbb{C}}$，$\mathfrak{f}_2 = \hat{\mathfrak{f}} \cap \mathfrak{m}_{\mathbb{C}}$，$\tilde{f}_1 = \tilde{f} \,|\, \mathfrak{n} \in \mathfrak{n}^*$，$\tilde{f}_2 = \tilde{f} \,|\, \mathfrak{m} \in \mathfrak{m}^*$ とおく．

a) $\mathfrak{n}$ は $\mathfrak{z}$ を center とする Heisenberg algebra で $\mathfrak{f}_1 \in P^+(\tilde{f}_1, \mathfrak{n})$．

b) $\mathfrak{f}_2 \in P^+(\tilde{f}_2, \mathfrak{m})$ で $\mathfrak{f}_2 \cap \mathfrak{m} = \{0\}$，$\mathfrak{f}_2 + \bar{\mathfrak{f}}_2 = \mathfrak{m}_{\mathbb{C}}$．$\mathfrak{m}$ 上の一次変換 j を，$X \in \mathfrak{f}_2$ に対し $jX = -iX$，$X \in \bar{\mathfrak{f}}_2$ に対し $jX = iX$ で定義してやると $(\mathfrak{m}, j, -\tilde{f}_2)$ は exponential j-algebra である．更に $\tilde{f}_1([\mathfrak{m}, \mathfrak{n}]) = 0$．

4．定理3で導入される$\mathfrak{m}$に定理1を適用してやり定理1の記号をそのまま用いる事にする。$\mathfrak{L}_i=\sum_{j>i}\mathfrak{n}^{\frac{1}{2}(\alpha_j-\alpha_i)}$, $\mathfrak{L}_i'=\sum_{i>j}\mathfrak{n}^{\frac{1}{2}(\alpha_i-\alpha_j)}$, $p_i=\dim\mathfrak{L}_i'$, $q_i=\dim\mathfrak{L}_i$, $r_i=\dim\tilde{\mathfrak{n}}^{\frac{1}{2}\alpha_i}$ とおき，更に $f_i=\tilde{f}_2(U_i)$ とする $(1\leqq i\leqq r)$．次に $W=\ker\tilde{f}_1\subset\mathfrak{n}$ とするとWは$\mathrm{ad}_{\mathfrak{n}}\mathfrak{m}$で不変であり$\mathrm{ad}_{W_\mathbb{C}}\mathfrak{a}$は対角化可能で$W_\mathbb{C}$はroot space $(W_\mathbb{C})^{\beta'}$に分解される．この時任意のroot β'は$\beta'=0$又は$\beta'(A)=\pm\frac{1}{2}\alpha_k(A)(1+i\beta'_{k,l})$ $(A\in\mathfrak{a})$, $\beta'_{k,l}\in\mathbb{R}$ の形である．$\tilde{W}_\mathbb{C}^{\frac{\alpha_k}{2}}=\sum_{\substack{\beta'=\frac{1}{2}(1+i\beta'_{k,l})\alpha_k\\ l}}(W_\mathbb{C})^{\beta'}$ とおき $\tilde{W}^{\frac{\alpha_k}{2}}=\tilde{W}_\mathbb{C}^{\frac{\alpha_k}{2}}\cap W$, $t_k=\dim\tilde{W}^{\frac{\alpha_k}{2}}$ とする $(1\leqq k\leqq r)$．Rossi-Vergne [4] の方法を少し修正して我々は次の定理を得る．

定理4．$\mathcal{H}(f,\mathfrak{f},G)\neq\{0\}$となるのは

$$-2f_i-\left(p_i+1+\tfrac{1}{2}(q_i+r_i+t_i)\right)>0\ ,\quad 1\leqq i\leqq r$$

なる時かつその時に限る．

この定理における不等式は最後の項t_iを除いてRossi-Vergneの結果と一致する．

5．Gは$\mathfrak{g}^*$にcoadjoint表現で作用しorbit space $\mathfrak{g}^*/G$を生じる．$f\in\mathfrak{g}^*$を通るorbitを$O(f)$で表わす．各orbit $\Omega\in\mathfrak{g}^*/G$にKirillov-Bernatの意味で対応するGの既約ユニタリ表現の同値類の代表元を$\rho(\Omega)$で表わす．$D=\exp\mathfrak{d}$, $\mathfrak{t}^\perp=\{l\in\mathfrak{g}^*;\, l|\mathfrak{t}=0\}$とおく．

<u>定義</u>. $D.f = f+\ell^{\perp}$ なる時 $\mathfrak{h}$ は <u>*Pukanszky condition*</u> をみたすという.

<u>定理 5</u>. $\mathcal{H}(f, \mathfrak{h}, G) \neq \{0\}$ とする. $\rho(f, \mathfrak{h}, G)$ が既約であるのは $\mathfrak{h}$ が *Pukanszky condition* をみたす時かつその時に限る. 更にこの時 $\rho(f, \mathfrak{h}, G) = \hat{\rho}(O(f))$, 特に $\rho(f, \mathfrak{h}, G)$ は $\mathfrak{h}$ に依らない.

6. *orbit* $\mathcal{O} \in \mathfrak{g}^*/G$ で $\mathcal{O} \cap (f+\ell^{\perp})$ が $f+\ell^{\perp}$ の空でない開集合となるものの集合を $U(f, \mathfrak{h})$ で表わし, *orbit* $\mathcal{O} \in \mathfrak{g}^*/G$ に対し $\mathcal{O} \cap (f+\ell^{\perp})$ の連結成分の数を $c(\mathcal{O}, f, \mathfrak{h})$ で表わす. 次の定理は *real polarization* に対する *Vergne* [5] の結果を一般化するものである.

<u>定理 6</u>. $\mathcal{H}(f, \mathfrak{h}, G) \neq \{0\}$ とする.

a) $U(f, \mathfrak{h})$ は有限集合である.

b) $\mathcal{O} \in U(f, \mathfrak{h})$ に対し $c(\mathcal{O}, f, \mathfrak{h}) < +\infty$.

c) $\rho(f, \mathfrak{h}, G) = \sum_{\mathcal{O} \in U(f, \mathfrak{h})} c(\mathcal{O}, f, \mathfrak{h}) \hat{\rho}(\mathcal{O})$.

References

[1] L. Auslander and B. Kostant, *Polarization and unitary representations of solvable Lie groups*, Invent. Math., 14 (1971), 255-354.

[2] G. Gindikin, I. I. Pjateckiĭ-Šapiro and E. E. Vinberg, Geometry of homogeneous bounded domains, C. I. M. E., 3 (1967), 3-87.

[3] I. I. Pjateckiĭ-Šapiro, "Geometry of classical domains and theory of automorphic functions," Gordon and Breach, New York, 1969.

[4] H. Rossi and M. Vergne, Representations of certain solvable Lie groups on Hilbert spaces of holomorphic functions and the application to the holomorphic discrete series of a semi-simple Lie group, J. Func. Anal., 13 (1973), 324-389.

[5] M. Vergne, Étude de certaines représentations induites d'un groupe de Lie résoluble exponentiel, Ann. Éc. Norm. Sup., 3 (1970), 353-384.